

弘文高中 高一數學銜接教材

第一單元 乘法公式

基本性質：

1. $a(b+c) = ab+ac$

2. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

3. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

4. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

5. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

6. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

7. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

8. $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = x^n - 1$

9. $(x+1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \cdots - x + 1) = x^n + 1, (n \text{ 為奇數})$

範例 1 展開下列各式 * $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

(1) $(2a+3)^2$

(2) $(3a-2)^2$

類題 1 展開下列各式

(1) $(4a+1)^2$

(2) $(2a-5)^2$

答：(1) $16a^2 + 8a + 1$ (2) $4a^2 - 20a + 25$

範例 2 展開下列各式 * 平方差公式； $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

(1) $(2a+1)(2a-1)$

(2) $197^2 - 3^2$

類題 2 展開下列各式

$$(1) (3a+2)(3a-2)$$

$$(2) 264^2 - 36^2$$

答：(1) $9a^2 - 4$ (2) 68400

範例 3 展開下列各式 * $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$$(1) (2x+1)^3$$

$$(2) (2a-b)^3$$

類題 3 展開下列各式

$$(1) (x+2)^3$$

$$(4) (a-4b)^3$$

答：(1) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ (2) $a^3 - 12a^2b + 48ab^2 - 64b^3$

範例 4 展開下列各式 * 立方和 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

立方差 $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$(1) (a-2)(a^2 + 2a + 4)$$

$$(2) (3a+1)(9a^2 - 3a + 1)$$

類題 4 展開下列各式

(1) $(2a-1)(4a^2+2a+1)$

(2) $(ab+1)(a^2b^2-ab+1)$

答：(1) $8a^3-1$ (2) a^3b^3+1

範例 5 (1) 設 $a+b=4$ ， $ab=3$ ，試求 a^2+b^2 與 a^3+b^3 之值。

(2) 設 $a+b+c=7$ ， $a^2+b^2+c^2=25$ ，試求 $ab+bc+ca$ 之值。

* $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

(3) 設 $a + \frac{1}{a} = 2$ ，試求 $a^2 + \frac{1}{a^2}$ 與 $a^3 + \frac{1}{a^3}$ 之值。

答：(1) 28 (2) 12 (3) 2

類題 2 (1) 設 $a - b = -5$, $ab = 6$, 試求 $a^2 + b^2$ 與 $a + b$ 之值。

(2) 設 $a^2 + b^2 + c^2 = 2$, $ab + bc + ca = 1$, 試求 $a + b + c$ 之值。

(3) 設 $a^2 = 6$, 試求 $(a+2)(a-2)(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)$ 之值。

(4) 設 $a + b + c = 6$, $ab + bc + ca = 11$, $abc = 6$, 試求 $a^3 + b^3 + c^3$ 之值。

答：(1) $37, \pm 7$ (2) ± 2 (3) 152 (4) 36

【第一單元綜合練習】

1. 試用乘法公式，展開下列各式：

(1) $(a+b)^2(a-b)^2$ (2) $(a+2)(a^2-2a+4)$ (3) $(a+b+c)(a-b+c)$

(4) $(a+2b)(a-3b)(a^2-2ab+4b^2)(a^2+3ab+9b^2)$ (5) $(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)$

2. 若 $204^2 - 196^2 = (204+196)(204+x) = y$ ，試求 x, y 之值。

3. 若 $(a+b)^2 = 21, (a-b)^2 = 5$ ，試求 ab 之值。

4. 設 $a+b=7$ ， $ab=10$ ，試求 a^2+b^2 與 a^4+b^4 之值。

5. 設 $x + \frac{1}{y} = 5, xy + \frac{1}{xy} = 18$ ，試求 $y + \frac{1}{x}$ 之值。

6. 設 $xy - x + y = 3$ ，試求 $(x+1)(y-1)$ 之值。

答：1. (1) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ (2) $a^3 + 8$ (3) $a^2 + 2ac + c^2 - b^2$ (4) $a^6 - 19a^3b^3 - 216b^6$

(5) $a^8 - 1$ 2. $-196, 3200$ 3. 4 4. $29, 641$ 5. 4 6. 2

第二單元 平方根與勾股定理

基本性質：

1. 方根化簡的原則：

- (1) 使分母不含根號。
- (2) 把根號內的因數盡量移到根號外。
- (3) 把開方次數化為最小。
- (4) 多重根號化為單根號。

2. 常用公式：

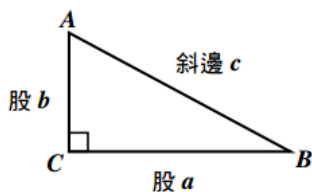
- (1) $\sqrt{a^2} = |a|$
- (2) $\sqrt[3]{a^3} = a$
- (3) $a \geq 0$ ，則 $\sqrt[n]{a^n} = a$
- (4) $a, b \geq 0$ ，則 $\sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}$
- (5) $a \geq 0$ ，則 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n]{a}$
- (6) $a \geq 0$ ，則 $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

3. 雙重根式

- (1) $\sqrt{(a+b)+2ab} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- (2) $\sqrt{(a+b)-2ab} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

4. 距離公式：座標平面上兩點 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，則 $\overline{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

5. 若 $\triangle ABC$ 為一直角三角形，則 $a^2 + b^2 = c^2$



範例 1 將下列各根式化為最簡根式：

- (1) $\sqrt{81}$
- (2) $\sqrt{72}$
- (3) $\sqrt[3]{-500}$
- (4) $\sqrt{3} + \sqrt{12} - 4\sqrt{48}$

$$(5) \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \quad (6) \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \quad (7) \sqrt[3]{\sqrt{8}}$$

$$\text{答：(1) } 9 \quad (2) 6\sqrt{2} \quad (3) -5\sqrt[3]{4} \quad (4) -13\sqrt{3} \quad (5) \sqrt{3}-\sqrt{2} \quad (6) \frac{\sqrt{6}}{6} \quad (7) \sqrt{2}$$

類題 1 將下列各根式化為最簡根式 ($a > 0$) :

$$(1) \sqrt{24a^5} \quad (2) \sqrt[3]{-27a^7} \quad (3) \sqrt[3]{\sqrt[2]{64a^8}} \quad (4) \sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{32}$$

$$(5) 6\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{-32}+2\sqrt[3]{108} \quad (6) \frac{2}{\sqrt{5}+1}$$

$$\text{答：(1) } 2a^2\sqrt{6a} \quad (2) -3a^2\sqrt[3]{a} \quad (3) 2a\sqrt[3]{a} \quad (4) 4\sqrt{2} \quad (5) 10\sqrt[3]{4} \quad (6) \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

範例 2 將下列各根式化為最簡根式：

$$(1) \sqrt{5+2\sqrt{6}} \quad (2) \sqrt{8-2\sqrt{7}}$$

答：(1) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{7}-1$

類題 2 將下列各根式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{7+2\sqrt{12}}$

(2) $\sqrt{17-12\sqrt{2}}$

答：(1) $2+\sqrt{3}$ (2) $3-2\sqrt{2}$

範例 3 化簡下列各式

(1) $\sqrt{64}-\sqrt{23}\times\sqrt{23}+\sqrt{81}$

(2) $3\sqrt{2}-7\sqrt{45}-3\sqrt{180}+\sqrt{72}$

(3) $\sqrt{\frac{5}{2}}\times\sqrt{\frac{125}{8}}-\sqrt{\frac{1}{3}}\times\sqrt{\frac{3}{16}}$

答：(1) -6 (2) $9\sqrt{2}-39\sqrt{5}$ (3) 6

類題 3 化簡下列各式

(1) $\sqrt{50}-\sqrt{24}+\sqrt{96}$

(2) $(\sqrt{10}-2\sqrt{5})(3\sqrt{5}+2\sqrt{10})$

$$(3) \frac{1}{2-\sqrt{3}} - \frac{5\sqrt{2}}{1+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

答：(1) $5\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$ (2) $-5\sqrt{2} - 10$ (3) 2

範例 4 設 $x=1+\sqrt{6}$ ， $y=\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ， $z=\sqrt{3}+\sqrt{4}$ ，則 x 、 y 、 z 的大小關係為何？

答： $z > y > x$

類題 4 比較 $a=\sqrt{12}+\sqrt{7}$ 、 $b=\sqrt{11}+\sqrt{8}$ 、 $c=\sqrt{10}+3$ 三數的大小。

答： $c > b > a$

範例 5 求下列各題中兩點間的距離

(1) $A(-3, -5)$ 、 $B(8, -5)$

(2) $C(9, -2)$ 、 $D(9, -8)$

答：(1) 11；(2) 6

類題 5 求下列各題中兩點間的距離：

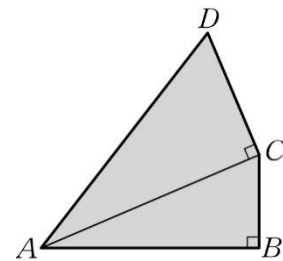
(1) $A(-5, 4)$ 、 $B(-10, -8)$

(2) $C(2, -3)$ 、 $D(-4, 5)$

答：(1) 13；(2) 10

範例 6 如附圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\angle B$ 和 $\angle ACD$ 都是直角。若 $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{BC} = 2$ ， $\overline{CD} = 3$ ，

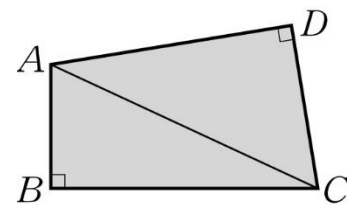
求 \overline{AD} 的長度。



答： $\sqrt{38}$

類題 6 如附圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\angle B$ 與 $\angle D$ 都是直角。若 $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{CD} = 4$ ， $\overline{AD} = 6$ ，求：

(1) \overline{AC} 的長度。 (2) \overline{BC} 的長度。



答：(1) $2\sqrt{13}$ ；(2) $\sqrt{43}$

【第二單元綜合練習】

1. 將下列各根式化為最簡根式：

- (1) $\sqrt{8} + \sqrt{12} + \sqrt{18} - \sqrt{27}$ (2) $\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{135}$ (3) $\sqrt{\frac{7}{6}}$ (4) $\sqrt[3]{\frac{5}{9}}$
- (5) $\frac{2}{\sqrt{3}+1} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ (6) $\sqrt{9+6\sqrt{2}}$ (7) $\sqrt{9-2\sqrt{20}}$ (8) $(2\sqrt{3}+5\sqrt{6})(2\sqrt{6}-\sqrt{3})$

2. 比較 $\sqrt{2} + \sqrt{11}$ 與 $\sqrt{6} + \sqrt{7}$ 的大小？

3. 比較 $\sqrt{7} - 2$ 與 $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ 的大小？

4. 設 $x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$ ，試求下列各式之值：

(1) $x + y =$

(2) $xy =$

(3) $x^2 + y^2 =$

5. (1) 坐標平面上， $A(-3, 2)$ 、 $B(4, 2)$ 兩點，求 \overline{AB} 的長度。

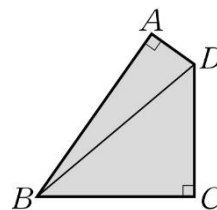
(2) 坐標平面上， $C(-2, -5)$ 、 $D(-2, -2)$ 兩點，求 \overline{CD} 的長度。

(3) 已知坐標平面上， $R(-3, 5)$ 、 $S(3, 2)$ 兩點，求 \overline{RS} 的長度。

6. 如附圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\angle A$ 與 $\angle C$ 都是直角。若 $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{CD} = 5$ ， $\overline{AD} = 2$ ，求：

(1) \overline{BD} 的長度。

(2) \overline{AB} 的長度。



答：1. (1) $5\sqrt{2} - \sqrt{3}$ (2) $5\sqrt{3}$ (3) $\frac{\sqrt{42}}{6}$ (4) $\frac{\sqrt[3]{15}}{3}$ (5) $\sqrt{5} - 1$ (6) $\sqrt{6} + \sqrt{3}$

(7) $\sqrt{5} - 2$ (8) $54 - 3\sqrt{2}$ 2. $\sqrt{6} + \sqrt{7}$ 大於 $\sqrt{2} + \sqrt{11}$

3. $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ 大於 $\sqrt{7} - 2$ 4. (1) $\sqrt{3}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{5}{2}$

5. (1) 7 ; (2) 3 ; (3) $3\sqrt{5}$ 6. (1) $\sqrt{61}$; (2) $\sqrt{57}$

第三單元 不等式

基本性質

1. 不等式：

利用符號「 $>$ 」、「 $<$ 」、「 \geq 」、「 \leq 」把二式連結起來的關係式稱作「不等式」。若某數（或某組數）代入不等式中的未知數後，該不等式成立，則該數（或該組數）稱為此不等式的「解」或「根」，求不等式解的過程稱為「解不等式」

2. 解不等式的基本原則：

(1) 若 $a > b$ ，則 $a + c > b + c$

(2) 若 $a > b$ ，則 $a - c > b - c$

(3) ① 若 $a > b$ 且 $c > 0$ ，則 $ac > bc$

② 若 $a > b$ 且 $c < 0$ ，則 $ac < bc$

(4) ① 若 $a > b$ 且 $c > 0$ ，則 $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

② 若 $a > b$ 且 $c < 0$ ，則 $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

3. 絕對值不等式：

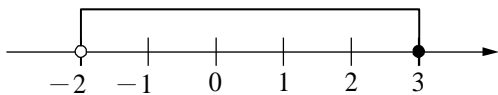
(1) 若 $|x| > a$ ，則 $x > a$ or $x < -a$

(2) 若 $|x| \geq a$ ，則 $x \geq a$ or $x \leq -a$

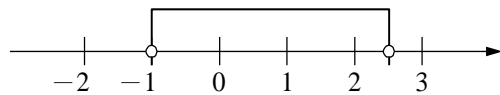
(3) 若 $|x| < a$ ，則 $-a < x < a$

(4) 若 $|x| \leq a$ ，則 $-a \leq x \leq a$

範例 1 如附圖， x 的範圍為_____。

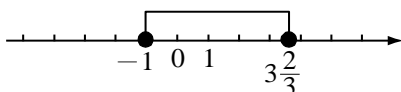


(2) 如附圖， x 的範圍為_____。

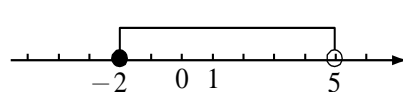


答：(1) $-2 < x \leq 3$ ；(2) $-1 < x < 2\frac{1}{2}$

類題 1 如附圖， x 的範圍為_____。



(2) 如附圖， x 的範圍為_____。



答：(1) $x \leq 3\frac{2}{3}$ 且 $x \geq -1$ ；(2) $-2 \leq x < 5$

範例 2 在數線上圖示下列不等式的解

(1) $x > 4$

(2) $-3 \leq x < 2$

(3) $x < 3\frac{2}{3}$ 且 $x \geq -1$

類題 2 在數線上圖示下列不等式的解

(1) $x < 5$

(2) $-4 < x \leq 3$

(3) $x < \frac{2}{3}$ 且 $x \geq -2$

範例 3 解下列不等式，並圖示其解

(1) $x - 2 > 10$

(2) $4x > 12$

(3) $x - 3x < 9$

(4) $-\frac{x}{2} \geq 5$

(5) $3x + 7 \geq 5x - 1$

答：(1) $x > 12$ (2) $x > 3$ (3) $x > -3$ (4) $x \leq -10$ (5) $x \leq 4$

類題 3 解下列不等式，並圖示其解

$$(1) 3x + 2 \leq -14$$

$$(2) 5 - 2x > -5$$

$$(3) 6x - 8 \geq 5 + 19x$$

$$\text{答：(1) } x \leq -\frac{16}{3} \quad (2) x < 5 \quad (3) x \leq -1$$

範例 4 解下列各一元一次不等式，並圖示其解：

$$(1) -7 < 5x - 3 \leq 7$$

$$(2) -1 \leq -2x \leq 6$$

$$\text{答：(1) } -\frac{4}{5} < x \leq 2; \quad (2) -3 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

類題 4 解下列各一元一次不等式，並圖示其解

$$(1) 7 > 2x + 1 > 5$$

$$(2) -4 < -x - 3 \leq 5$$

$$\text{答：(1) } 2 < x < 3; \quad (2) -8 < x < 1$$

範例 5 解下列各絕對值不等式，並圖示其解

(1) $|x| \leq 3$

(2) $|x| > 5$

類題 5 解下列各絕對值不等式，並圖示其解

(1) $|x| \geq 2$

(2) $|x| < 5$

【第三單元綜合練習】

1. 解下列各不等式： (1) $x - \frac{2x-3}{6} > -1$ (2) $3x+6-(5x-2) \geq 2(x-6)+4$

2. 解下列各一元一次不等式

(1) $7x < 3x+4$ (2) $5-3x > 2(x-5)$ (3) $-1-5(2x-3) \geq 7$

(4) $2(x-1)-3(x-5) < x-3$ (5) $\frac{2x+1}{6} - \frac{x-2}{5} \leq 1$

3. 解下列各絕對值不等式，並圖示其解

(1) $|x| < 2$ (2) $|x| \geq 4$

答：1. (1) $x > -\frac{9}{4}$ (2) $x \leq 4$ 2. (1) $x < 1$; (2) $x < 3$; (3) $x \leq \frac{7}{10}$; (4) $x > 8$; (5) $x \leq \frac{13}{4}$

3. (1) $-2 < x < 2$ (2) $x > 4$ 或 $x < -4$